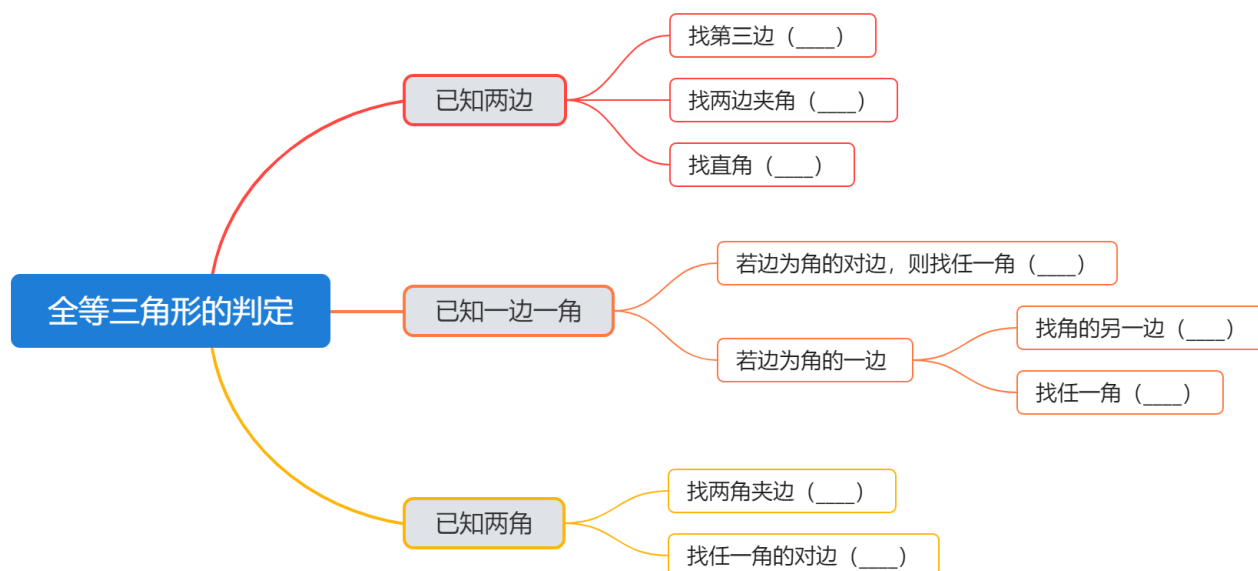


第2讲全等三角形的证明

常用思路总结



【备注】

已知两边 SS $\begin{cases} \text{找另一边} \rightarrow SSS \\ \text{找夹角} \rightarrow SAS \\ \text{找直角} \rightarrow HL \end{cases}$

已知一边一角 SA $\begin{cases} \text{边为角的对应边} \rightarrow \text{找任意一角} \rightarrow AAS \\ \text{边是角的一条边} \begin{cases} \text{找这条边上的另一个角} \rightarrow ASA \\ \text{找这条边上的对应角} \rightarrow AAS \\ \text{找该角的另一边} \rightarrow SAS \end{cases} \end{cases}$

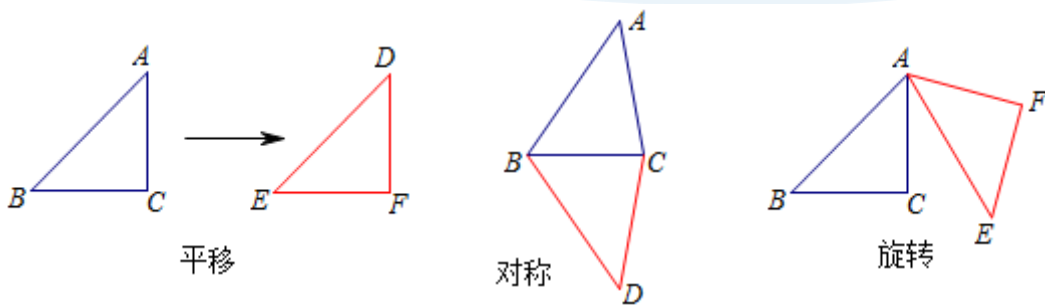
已知两角 AA $\begin{cases} \text{找两角的夹边} \rightarrow ASA \\ \text{找任意一边} \rightarrow AAS \end{cases}$

【注意】

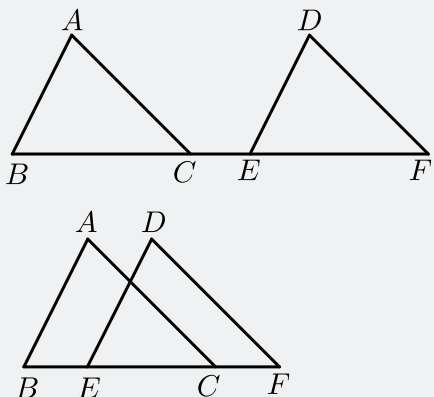
- ① 切记“有三个角对应相等”和“有两边和其中一边的对角对应相等”的两个三角形不一定全等；
- ② 判定两个三角形全等必不可少的条件至少有一条对应边相等。

一、变换型全等

一个三角形经过**平移**、**翻折**、**旋转**后，位置变化了，但是形状、大小都没有改变，即平移、翻折和旋转前后的图形全等。



1. 平移

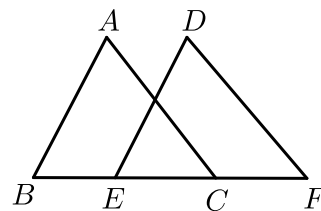


此类题目中条件一般不会直接给“将一个三角形平移得到另一个三角形”作为条件，主要是通过平移型来找到需证的两个全等三角形。

🍌 举个“栗”子

🍌 栗子1

1. 如图所示， $AC = DF$ ， $\angle ACB = \angle F$ ，下列条件中不能判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 的是（ ）。



A. $BE = CF$

B. $\angle A = \angle D$

C. $AB = DE$

D. $AB \parallel DE$

【备注】已知一边一角，可以通过SAS, ASA, AAS判定全等，不可用SSA判定

【答案】C

【解析】A选项：符合SAS，可以判定；

B 选项：符合ASA，可以判定；

C 选项： $AB = DE$ 不是 $\angle ACB = \angle F$ 的邻边，SSA不能证全等，所以错误；

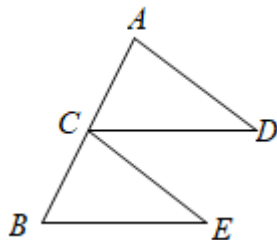
D 选项：符合SAS，可以判定。

故选 C。

【标注】【知识点】多解或多种判定混合

栗子2

2. 如图， C 是 AB 的中点， $AD = CE$ ，若添加一个条件使 $\triangle ACD \cong \triangle CBE$ ，你添加的条件是_____。



【备注】已知两边，可利用SSS、SAS判定全等

【答案】 $CD = BE$ 或 $\angle A = \angle BCE$

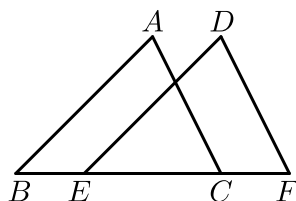
【解析】添加 $CD = BE$ 可根据SSS判定 $\triangle ACD \cong \triangle CBE$ 。

添加 $\angle A = \angle BCE$ 可根据SAS判定 $\triangle ACD \cong \triangle CBE$ 。

【标注】【知识点】多解或多种判定混合

栗子3

3. 如图，已知点 E 、 C 在线段 BF 上， $BE = CF$ ， $AB \parallel DE$ ， $\angle ACB = \angle F$ ，求证： $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。



【备注】难度较为基础，需要学生熟练利用 $BE = CF$ 推导出 $BC = EF$ ，再进行判定

【答案】证明见解析 .

【解析】 $\because BE = CF$,

$$\therefore BE + EC = CF + EC ,$$

$$\therefore BC = EF ,$$

$$\because AB \parallel DE ,$$

$$\therefore \angle B = \angle DEF ,$$

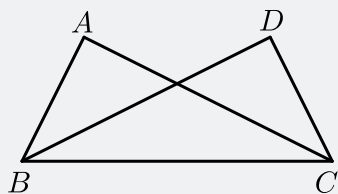
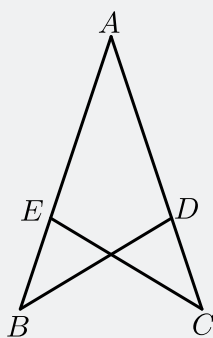
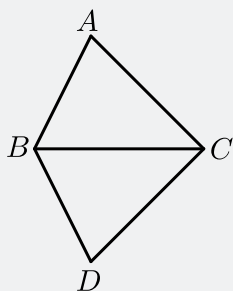
在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中

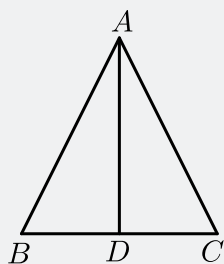
$$\begin{cases} \angle B = \angle DEF \\ BC = EF \\ \angle ACB = \angle F \end{cases} ,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF (ASA) .$$

【标注】【知识点】ASA

2. 对称



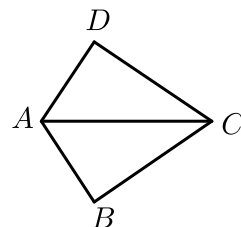


此类题目中主要存在隐含的公共边或公共角作为证明全等三角形的一组条件，经常会出现复杂的证明题中。

🔔 举个“栗”子

栗子4

4. 如图，已知 $AB = AD$ ，那么添加下列一个条件后，仍无法判定 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ 的是（ ）。



- A. $CB = CD$ B. $\angle BAC = \angle DAC$ C. $\angle BCA = \angle DCA$ D. $\angle B = \angle D = 90^\circ$

【备注】 注意到题目中的公共边，转化为已知两边相等的问题

【答案】 C

【解析】 A 选项：添加 $CB = CD$ ，根据SSS，能判定 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ ，故A选项不符合题意；

B 选项：添加 $\angle BAC = \angle DAC$ ，根据SAS，能判定 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ ，故B选项不符合题意；

C 选项：添加 $\angle BCA = \angle DCA$ 时，不能判定 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ ，故C选项符合题意；

D 选项：添加 $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ，根据HL，能判定 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ ，故D选项不符合题意。

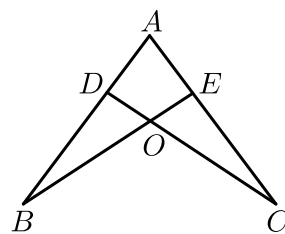
故选 C。

【标注】 【知识点】多解或多种判定混合

栗子5

5.

如图，点 D ， E 分别在线段 AB ， AC 上， BE ， CD 相交于点 O ， $AE = AD$ ，要使 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ，需添加一个条件是 _____（只需一个即可，图中不能再添加其他点或线）。



【备注】注意到 $\angle A$ 为公共角，再转化为已知一边一角的问题

【答案】 $AB = AC$ (答案不唯一)

【解析】 $\because \angle A = \angle A$ ， $AE = AD$ ，

添加： $\angle ADC = \angle AEB$ (ASA)， $\angle B = \angle C$ (AAS)， $AB = AC$ (SAS)，
 $\angle BDO = \angle CEO$ (ASA)， $DB = EC$ (SAS)

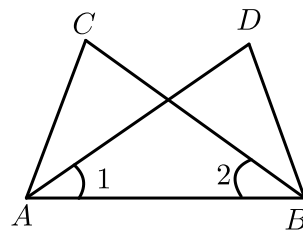
$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD$ 。

故答案为： $\angle ADC = \angle AEB$ 或 $\angle B = \angle C$ 或 $AB = AC$ 或 $\angle BDO = \angle CEO$ 或
 $DB = EC$ 。

【标注】【知识点】多解或多种判定混合

栗子6

6. 如图， AD ， BC 分别平分 $\angle CAB$ ， $\angle DBA$ ，且 $\angle 1 = \angle 2$ ，试探究 AC 与 BD 的数量关系，并说明理由。



【备注】注意到 AB 为公共边，解题关键在 $\angle 1 = \angle 2$ 的条件，可推导 $\angle CAB = \angle DBA$

【答案】 $AC = BD$ ；证明见解析。

【解析】 $\because AD$ ， BC 分别平分 $\angle CAB$ ， $\angle DBA$ ，

$\therefore \angle 1 = \frac{1}{2} \angle CAB$ ， $\angle 2 = \frac{1}{2} \angle DBA$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ ，

$$\therefore \angle CAB = \angle DBA,$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BAD$ 中,

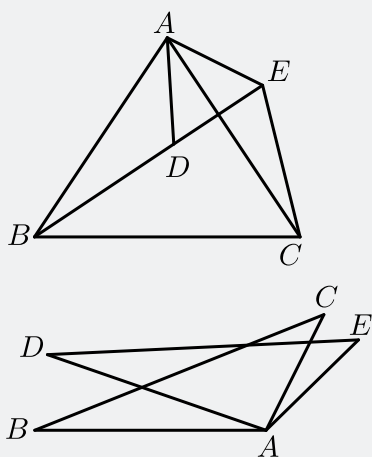
$$\begin{cases} \angle CAB = \angle DBA \\ AB = BA \\ \angle 1 = \angle 2 \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle BAD (ASA),$$

$$\therefore AC = BD.$$

【标注】【知识点】ASA

3. 旋转

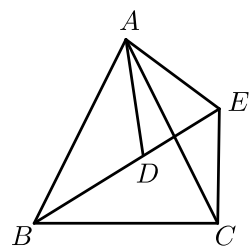


此类题目中主要根据旋转型来寻找需证的全等三角形，对于比较难的题会考查旋转型全等的思路作为解题突破口。

🧠 举个“栗”子

栗子7

7. 如图，已知 $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，若要得到 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，必须添加一个条件，则下列所添条件不成立的是（ ）。



A. $BD = CE$

B. $\angle ABD = \angle ACE$

C. $\angle BAD = \angle CAE$

D. $\angle BAC = \angle DAE$

【备注】 已知两边，可利用SSS、SAS判定全等，除了直接给出 $\angle BAD = \angle CAE$ 外，仍可以利用等式性质给出 $\angle BAC = \angle DAE$

【答案】 B

【解析】 $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，

A选项：若 $BD = CE$ ，则根据“SSS”，

$\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，恰当，故A错误；

B选项：若 $\angle ABD = \angle ACE$ ，则符合“SSA”不能判定，

$\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，不恰当，故B正确；

C选项： $\angle BAD = \angle CAE$ ，则符合“SAS”，

$\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，恰当，故C错误；

D选项： $\angle BAC = \angle DAE$ ，则

$\angle BAC - \angle DAC = \angle DAE - \angle DAC$ ，

即 $\angle BAD = \angle CAE$ ，符合“SAS”，

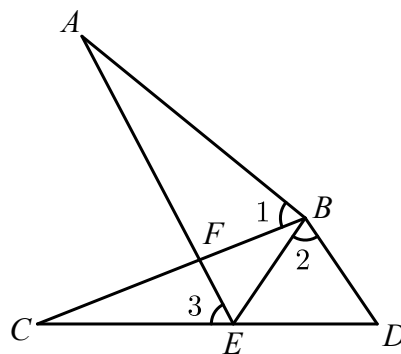
$\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，恰当，故D错误；

故选B．

【标注】 【知识点】多解或多种判定混合

栗子8

8. 如图，点E在CD上，BC与AE交于点F， $AB = CB$ ， $BE = BD$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ．



(1) 求证： $\triangle ABE \cong \triangle CBD$ ．

(2) 证明： $\angle 1 = \angle 3$ ．

【备注】 典型旋转问题，利用SAS判定全等
可以给学生铺垫一下手拉手模型

【答案】 (1) 证明见解析．

(2) 证明见解析.

【解析】(1) $\because \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore \angle 1 + \angle CBE = \angle 2 + \angle CBE$, 即 $\angle ABE = \angle CBD$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CBD$ 中,
$$\begin{cases} AB = CB \\ \angle ABE = \angle CBD \\ BE = BD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBD (\text{SAS})$.

(2) $\because \triangle ABE \cong \triangle CBD$,

$\therefore \angle A = \angle C$,

$\because \angle AFB = \angle CFE$,

$\therefore \angle 1 = \angle 3$.

【标注】【知识点】SAS

【知识点】全等三角形的对应边与角

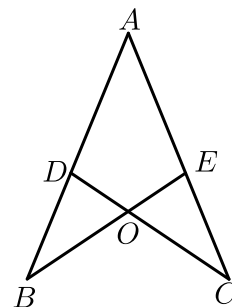
【能力】推理论证能力

二、二次全等

👤 举个“栗”子

栗子9

9. 如图, 点 D 在 AB 上, 点 E 在 AC 上, $AB = AC$, $\angle B = \angle C$. CD 与 BE 交于点 O . 求证: $\triangle DOB \cong \triangle EOC$.



【备注】题目要求证明的是 $\triangle DOB \cong \triangle EOC$, 但所给条件不能直接判定, 所以需要利用二次全等解题, 可以利用 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ 得到 $AE = AD$ 进而推导出 $BD = CE$, 再去判定即可

【答案】证明见解析.

【解析】 $\because$ 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中

$$\begin{cases} \angle A = \angle A \\ AB = AC, \\ \angle B = \angle C \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD (ASA),$$

$$\therefore AE = AD,$$

$$\therefore AC = AB,$$

$$\therefore BD = CE,$$

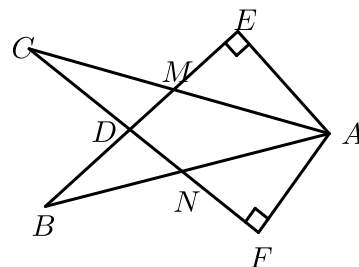
在 $\triangle DOB$ 和 $\triangle EOC$ 中

$$\begin{cases} \angle B = \angle C \\ \angle DOB = \angle EOC, \\ BD = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DOB \cong \triangle EOC (AAS).$$

【标注】【知识点】全等三角形之二次全等

10. 如图：在 $\text{Rt}\triangle AEB$ 和 $\text{Rt}\triangle AFC$ 中， $\angle E = \angle F = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， BE 与 AC 相交于点 M ，与 CF 相交于点 D ， AB 与 CF 相交于点 N ， $\angle EAC = \angle FAB$ ，求证： $\triangle EAM \cong \triangle FAN$ 。



【备注】进一步巩固二次全等，先判定大三角形全等，注意到 $\angle EAC = \angle FAB$ 的应用

【答案】证明见解析。

【解析】 $\because \angle EAC = \angle FAB,$
 $\therefore \angle EAC + \angle BAC = \angle FAB + \angle BAC,$
 $\therefore \angle EAB = \angle FAC.$
 在 $\triangle EAB$ 和 $\triangle FAC$ 中，

$$\begin{cases} \angle E = \angle F \\ \angle EAB = \angle FAC, \\ AB = AC \end{cases}$$
 $\therefore \triangle EAB \cong \triangle FAC (AAS).$
 $\therefore AE = AF,$
 在 $\triangle EAM$ 和 $\triangle FAN$ 中，

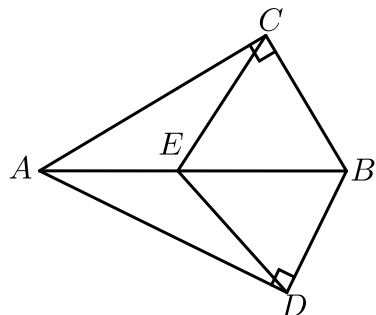
$$\begin{cases} \angle E = \angle F \\ AE = AF \\ \angle EAM = \angle FAN \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EAM \cong \triangle FAN (\text{ASA}) .$$

【标注】【知识点】全等三角形之二次全等

栗子10

11. 如图, $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$, $AC = AD$, E 是 AB 上的一点. 求证: $CE = DE$.



【备注】要证明 $CE = DE$, 可证明 $\triangle CBE \cong \triangle DBE (\text{SAS})$, 但仍无法直接证明, 所以需要先利用已知条件证明 $\triangle ABC \cong \triangle ABD (\text{SAS})$, 再利用其性质解题

【答案】证明见解析.

【解析】 $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中,

$$\begin{cases} AB = AB \\ AC = AD \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle ABD (\text{HL})$,

$\therefore BC = BD$, $\angle CBA = \angle DBA$,

在 $\triangle CBE$ 和 $\triangle DBE$ 中,

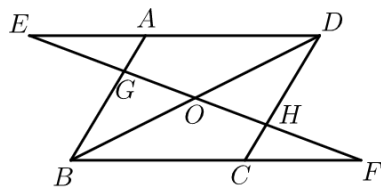
$$\begin{cases} BE = BE \\ \angle CBE = \angle DBE, \\ BC = BD \end{cases}$$

$\therefore \triangle CBE \cong \triangle DBE (\text{SAS})$,

$\therefore CE = DE$.

【标注】【知识点】全等三角形之二次全等

12. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = CD$, $AB \parallel CD$, E, F 分别是 DA, BC 延长线上的点, 且 $AE = CF$, 连接 EF 交 BD 于点 O , 分别交 AB, CD 于点 G, H . 求证: $EG = FH$.



【备注】 难度较大，综合性较强，注意到平行线的应用，先判定 $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ 推导平行，再利用其性质倒角

【答案】 证明见解析．

【解析】 如图， $\because AB \parallel DC$ ，

$$\therefore \angle ABD = \angle CDB, \angle EAG = \angle ADC,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CDB$ 中，

$$\begin{cases} AB = CD \\ \angle ABD = \angle CDB, \\ BD = DB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CDB \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle ADB = \angle CBD,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle E = \angle F, \angle ADC = \angle FCH,$$

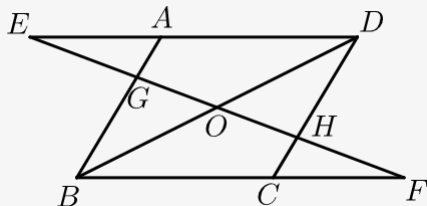
$$\therefore \angle EAG = \angle FCH,$$

在 $\triangle AEG$ 和 $\triangle CFH$ 中，

$$\begin{cases} \angle EAG = \angle FCH \\ AE = CF \\ \angle E = \angle F \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle CFH \text{ (ASA)},$$

$$\therefore EG = FH.$$



【标注】 【知识点】 多解或多种判定混合